β関手とStone-Čechコンパクト化の諸性質

問題提起：
集合 Y と位相空間 X、および写像 $\phi : \beta Y \to X$ が与えられている。 $f = \phi \circ \iota_Y$ とおくとき、等式

$$\beta f = \iota_X \circ \phi$$

は常に成立するか？

1. 集合圏（Sets）における検討と反例

結論から述べると、単なる集合と写像の枠組み（連続性を仮定しない場合）において、この等式は**一般には成立しません。**

反例の構成

Y を自然数の集合 $\mathbb{N}$、X を2点集合 $\{0, 1\}$ とします。

$\beta\mathbb{N}$ には少なくとも1つの自由ウルトラフィルター（どの有限集合も含まないウルトラフィルター）が存在します。これを $U_\infty \in \beta\mathbb{N}$ とします。

ここで、写像 $\phi : \beta\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ を次のように定義します：

- U が単項ウルトラフィルター $\iota_\mathbb{N}(n)$ であるとき： $\phi(U) = 0$
- U が自由ウルトラフィルターであるとき（U_∞ を含む）： $\phi(U) = 1$

(1) 左辺 βf の評価

$f = \phi \circ \iota_\mathbb{N} : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ を考えると、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$f(n) = \phi(\iota_{\mathbb{N}}(n)) = 0$ です。つまり f は定数写像です。したがって、βf はすべてのウルトラフィルターを $\iota_X(0)$ に写します。

$$\beta f(U_\infty) = \iota_X(0)$$

(2) 右辺 $\iota_X \circ \phi$ の評価

ϕ の定義により $\phi(U_\infty) = 1$ なので、

$$(\iota_X \circ \phi)(U_\infty) = \iota_X(\phi(U_\infty)) = \iota_X(1)$$

$\iota_X(0) \neq \iota_X(1)$ であるため、自由ウルトラフィルター上で値が異なり、等式は成立しません。

2. 位相空間圏（Top）における成立

$\phi : \beta Y \to X$ が**連続写像**であるという条件が加わると、等式は常に成立します。

定理： X が位相空間であり、$\phi : \beta Y \to X$ が連続であれば、$\beta f = \iota_X \circ \phi$ が成立する。

成立の論理的証明

1. **部分集合上の一致：** ι は自然変換 $\mathrm{Id} \to \beta$ であるため、任意の $f : Y \to X$ に対し $\beta f \circ \iota_Y = \iota_X \circ f$ が成立する。 ここに $f = \phi \circ \iota_Y$ を代入すると：

   $$(\beta f) \circ \iota_Y = (\iota_X \circ \phi) \circ \iota_Y$$

   となり、βY の部分空間である $\iota_Y(Y)$ 上で両辺は一致する。
2. **写像の連続性：** βf は定義により連続である。また、ϕ が連続であり $\iota_X : X \to \beta X$ も連続であるため、合成写像 $\iota_X \circ \phi$ も連続である。
3. **Hausdorff性と稠密性：** βX はコンパクト Hausdorff 空間であり、$\iota_Y(Y)$ は βY において稠密である（後述の証明参照）。 Hausdorff 空間への連続写像が稠密な部分集合上で一致するならば、空間全体で一致する。

（証明終）

3. 基礎となる定理の詳細な証明

定理 A: $\iota_Y(Y)$ の βY における稠密性

βY の位相の基底を $\hat{A} = \{\mathcal{U} \in \beta Y \mid A \subseteq Y, A \in \mathcal{U}\}$ とする。

【証明】
βY の空でない任意の開集合 G をとる。基底の定義より、ある空でない $A \subseteq Y$ に対して $\hat{A} \subseteq G$ となる。
A は空ではないので、ある元 $y \in A$ が存在する。このとき、単項ウルトラフィルター $\iota_Y(y)$ は A を元として持つため（$A \in \iota_Y(y)$）、定義により $\iota_Y(y) \in \hat{A}$ である。
したがって $\iota_Y(y) \in G$ となり、$\iota_Y(Y) \cap G \neq \emptyset$ が示された。よって $\iota_Y(Y)$ は βY において稠密である。$\square$

定理 B: 連続写像の一致の定理

【証明】
$g, h : S \to Z$ を連続写像、Z を Hausdorff 空間とする。稠密な $A \subseteq S$ 上で $g(a) = h(a)$ とする。
ある $s \in S$ で $g(s) \neq h(s)$ と仮定する。Z の Hausdorff 性より、$g(s)$ と $h(s)$ の互いに素な開近傍 V_g, V_h が存在する。
連続性より、$g^{-1}(V_g)$ と $h^{-1}(V_h)$ は共に s の開近傍である。その共通部分 $U = g^{-1}(V_g) \cap h^{-1}(V_h)$ も s の開近傍であり、空ではない。
A の稠密性より、ある $a \in A \cap U$ が存在する。このとき $g(a) \in V_g$ かつ $h(a) \in V_h$ であるが、仮定 $g(a) = h(a)$ より $V_g \cap V_h \neq \emptyset$ となり、互いに素であることに矛盾する。$\square$

4. 連続性の有無による比較

特性	集合圏（Sets）	位相空間圏（Top）

自由ウルトラフィルターの挙動	単項ウルトラフィルターの像とは独立に決定可能	単項ウルトラフィルターの極限として一意に決定
等式の成立	ϕ の定義に依存（反例あり）	**常に成立する**
背景理論	単なる関手性	Stone-Čechコンパクト化の普遍性

5. カテゴリー論的視点：随伴性と普遍性

Stone-Čechコンパクト化の普遍性は、包含関手 $U : \mathbf{KHaus} \to \mathbf{Top}$ の左随伴関手として理解できます。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, U(X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{KHaus}}(\beta Y, X)$$

任意の連続写像 $f : Y \to X$ に対して、その延長である $\bar{f} : \beta Y \to X$ が唯一存在します。 問題の ϕ が連続であるという仮定は、ϕ がまさに f のStone-Čech延長としての役割を果たしていることを意味します。連続写像としての「延長の一意性」が、βf と ϕ の（埋め込みを通じた）一致を強制しているのです。